14/10/2019

Έστω το σύνολο αριθμών μηχανής $M = M(b, t, L, U)$

Έστω x δεν είναι αριθμός μηχανής αλλά βρίσκεται στο φάσμα αριθμών μηχανής, υποθέτοντας ότι $x > 0$.

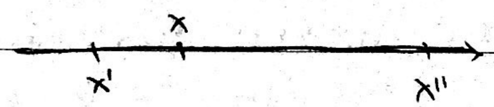
$.1 \cdot b^{L} < x < .d_1 d_2 \ldots d_t \, b^{U}$, όπου $d_i = b-1$, $i = 1, 2, \ldots t$

Συμβολίζουμε με $fl(x)$ την προσέγγιση του x με αριθμό μηχανής

~~Θα~~ Θα υπολογίσουμε φράγμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος κατά την προσέγγιση του x στο M.

Υπάρχουν x' x'' διαδοχικοί αριθμοί μηχανής τέτοιοι ώστε $x' < x < x''$.

$$|\varepsilon| = \left| \frac{fl(x) - x}{x} \right|$$



$x = q \cdot b^{k}$, $q = .d_1 d_2 \ldots d_t d_{t+1} d_{t+n} \ldots$, $L \le k \le U$

$x' = .d_1 d_2 \ldots d_t \cdot b^{k}$, $x'' = (.d_1 d_2 \ldots d_t + b^{-t}) b^{k}$

$x'' - x' = b^{k-t}$

$x \geq .1 \cdot b^{k} = b^{k-1}$

$|\varepsilon| \le \frac{1}{2} \frac{x'' - x'}{|x|} \le \frac{1}{2} \frac{b^{k-t}}{b^{k-1}} = \frac{1}{2} b^{1-t} = u$ μοναδιαίο σφάλμα μηχανής.

$123.45 + 12.345$ $\quad M = M(10, 5, -10, 10)$

Όταν θέλουμε να εκτελέσουμε την πράξη $x * y$, $* \in \{+, -, \times, :\}$

Η μηχανή βρίσκει τον αριθμό $z = fl(fl(x) * fl(y))$

$fl(x) = .123 \cdot 10^{3}$, $fl(y) = .123 \cdot 10^{2}$

$fl(x) + fl(y) = (.123 + 0.0123) 10^{3} = 0.1353 \cdot 10^{3}$

$z = fl(.1353 \cdot 10^3) = .135 \cdot 10^3$

$x+y = .135795 \cdot 10^3 \quad , fl(x+y) = 0.136 \cdot 10^3$

Εκτίμηση απολύτων σχετικών σφαλμάτων

Κατά την αποθήκευση του x το σχ. σφάλμα

$\varepsilon = \dfrac{fl(x) - x}{x} \iff fl(x) = x(1+\varepsilon)$

Πολλαπλασιασμός

Αντί της πράξης $x \cdot y$ η μηχανή εκτελεί $z = fl(fl(x) \cdot fl(y)) =$

$= fl(x(1+\varepsilon_1) \cdot y(1+\varepsilon_2)) = x(1+\varepsilon_1)y(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \; , \; |\varepsilon_i| \leq u$

Έστω $\eta = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \dots (1+\varepsilon_m) \; , \; |\varepsilon_i| \leq u, \; i = 1,2,3 \dots m$

τότε υπάρχει $-u \leq \varepsilon \leq u$ τέτοιο ώστε $\eta = (1+\varepsilon)^m$

$(1-u)^m \leq \eta \leq (1+u)^m$ Από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για τη συνάρτηση $f(x) = (1+x)^m$ προκύπτει ότι $\exists\, \varepsilon : -u \leq \varepsilon \leq u$ τέτοιο ώστε $\eta = (1+\varepsilon)^m$.

$z = xy(1+\varepsilon)^3$

$$|d| = \left| \frac{fl(z) - xy}{x \cdot y} \right| = \left| \frac{xy(1+\varepsilon)^3 - xy}{xy} \right| = |(1+\varepsilon)^3 - 1| = |3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3| \leq$$

$$\leq 3|\varepsilon| + 3\varepsilon^2 + |\varepsilon|^3 \leq 3u + 3u^2 + u^3 \approx 3u$$

$fl(fl(fl(x) \cdot fl(y)) \cdot fl(w))$

Διαίρεση

$$z = fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) = fl\left(\frac{x(1+\varepsilon_1)}{y(1+\varepsilon_2)}\right) = \frac{x}{y}\,\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}{1+\varepsilon_2} = \frac{x}{y}(1+\varepsilon)^2(1+d)$$

Παρατηρώ ότι $\frac{1}{1+\varepsilon_2} = (1+d)$ όπου $d = \frac{-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$

Παρατηρώ ότι $\frac{1}{1+\varepsilon_2} = (1+d)$ όπου $d = \frac{-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$, $|d| = \frac{|\varepsilon_2|}{|1+\varepsilon_2|} \leq \frac{u}{1-u}$

$= u(1+u+u^2+\dots) = u + \frac{u^2}{1-u} \approx u$

$$\left|\frac{z-\frac{x}{y}}{xy}\right| = \left|\frac{\frac{x}{y}(1+\varepsilon)^2(1+d) - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|(1+\varepsilon)^2(1+d) - 1\right| =$$

$= 2\varepsilon + \varepsilon^2 + d + 2\varepsilon d + \varepsilon^2 d = 3u + \alpha$, όπου α είναι της τάξης u^2

$\approx 3u$

Scanned with CamScanner